Théorème d'inversion locale

Théorème Soient E, F des espaces de Banach, Ω un ouvert de E, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow F$ C^1.
Si $df(x_0)$ est un isomorphisme bicontinu de E dans F alors il existe U un voisinage ouvert de x_0 dans Ω et V un voisinage ouvert de $f(x_0)$ dans F tels que $f|_U : U \longrightarrow V$ est un C^1 - difféomorphisme.

▷ Étape 1 : Simplification du problème

Quitte à considérer l'application $x \longmapsto df(x_0)^{-1}(f(x_0+x) - f(x_0))$ on peut supposer pour la suite que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ et $df(0) = df(x_0) = id_E$.

Dans la suite, on notera B_r la boule ouverte de centre 0 et de rayon r, et $\overline{B_r}$ son analogue fermée.

▷ Étape 2 : Existence d'un inverse local

La fonction f étant de classe C^1, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B_r} \subset \Omega$ et pour tout $x \in B_r$, on ait
$\|df(x) - df(0)\| = \|df(x) - id_E\| \leqslant \frac{1}{2}$
Pour $x \in B_r$,

$$df(x) = id_E - u \quad \text{avec } \|u\| \leqslant \frac{1}{2} < 1$$

Donc $df(x)$ est un isomorphisme bicontinu qui vérifie $df(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ et $\|df(x)^{-1}\| \leqslant 2$.

Montrons que pour $y \in B_{r/2}$, il existe un unique $x \in B_r$ tel que $f(x) = y$.
Fixons $y \in B_{r/2}$. On définit alors $h : x \longmapsto x + y - f(x)$.
On a alors :

- $h \in C^1$ et $\forall x \in B_r$, $\|dh(x)\| = \|id_E - df(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$
- par le théorème des accroissements finis, pour $x, x' \in \overline{B_r}$, $\|h(x) - h(x')\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|$

Donc :

$$\forall x \in \overline{B_r},\ \|h(x)\| \leqslant \|y\| + \|x - f(x)\| = \|y\| + \|h(x) - h(0)\| \leqslant \|y\| + \frac{\|x\|}{2} < r$$

On a alors :

$$h : \overline{B_r} \longrightarrow B_r \subset \overline{B_r} \text{ contractante}$$

En appliquant le théorème de Picard, il y a existence et unicité de $x \in \overline{B_r}$ (et donc B_r) tel que $h(x) = x$
i.e. $f(x) = y$.
Donc : $f|_U : U \longrightarrow V$ est bijective en posant $U = f^{-1}(B_{r/2}) \cap B_r$ et $V = B_{r/2}$.

▷ Étape 3 : Continuité de l'inverse

Notons $g : V \longrightarrow U$ l'inverse et $h : x \longmapsto x - f(x)$.
On a alors :

$$\forall x, x' \in B_r,\ \|x - x'\| \leqslant \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$

i.e. $\|x - x'\| \leqslant 2\|f(x) - f(x')\|$

Ainsi, g est 2-lipschitzienne donc continue.

▷ Étape 4 : Inverse de classe C^1 ⟵ commentaire C. Audiard : le temps étant limité, on peut omettre cette partie, dire qu'après des calculs on peut montrer que f^{-1} est différentiable et donner calcul heuristique $f \circ f^{-1} = id$ donc $df(f^{-1}(x)) \circ df^{-1}(x) = id$ d'où :

Fixons $x \in U$ et $y = f(x) \in V$.
Soit $w \in V - y$ et $v = g(y+w) - g(y)$.
On a alors :

$$\|v\| \leqslant 2\|w\| \quad \text{et} \quad \Delta(w) := g(y+w) - g(y) - df(x)^{-1}(w) = -df(x)^{-1}(f(x+v) - f(x) - df(x)(v))$$

Or $\|df(x)^{-1}\| \leqslant 2$ donc :

$$\|\Delta(w)\| \leqslant 2\|f(x+v) - f(x) - df(x)(v)\| = 2\|v\|\,\varepsilon(v) \leqslant 4\|w\|\,\varepsilon[g(y+w) - g(y)]$$

La fonction g est continue donc $\lim_{w \to 0} \varepsilon[g(y+w) - g(y)] = 0$ et $\|\Delta(w)\| = o(\|w\|)$.
Ainsi,

g est différentiable en y et $dg(y) = df(x)^{-1}$

De plus, f est de classe C^1, g est continue et $u \longmapsto u^{-1}$ est continue alors $y \longmapsto dg(y) = df(g(y))^{-1}$ est continue. Donc g est de classe C^1.